DIFICULTADES EN CONCEPTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Montserrat Alguacil de Nicolás
Universidad Ramon Llull, Facultad de Psicología, Ciencias de la Educación y del Deporte Blanquerna
motserratan@blanquerna.url.edu
Maria Carme Boqué Torremorell
Universidad Ramon Llull, Facultad de Psicología, Ciencias de la Educación y del Deporte Blanquerna
Mercè Pañellas Valls
Universidad Ramon Llull, Facultad de Psicología, Ciencias de la Educación y del Deporte Blanquerna

http://dx.doi.org/10.17060/ijodaep.2016.n1.v1.162

Fecha de Recepción: 3 Febrero 2016
Fecha de Admisión: 15 Febrero 2016

RESUMEN

Las matemáticas son importantes para la formación de un ciudadano porque constituyen un poderoso instrumento de análisis de la realidad, de comprensión del mundo y de desarrollo de la capacidad de crítica para intervenir.

Creemos que ésta es la finalidad más importante de la actividad matemática de las personas, pero para poder alcanzarla, los futuros maestros deben tener seguridad en el conocimiento matemático básico sobre el que se pueden construir nuevos conocimientos.

No obstante, en el ámbito de la educación matemática, los errores aparecen permanentemente en las producciones de los alumnos.

En este artículo se estudian los errores cometidos por los alumnos, ya que proporcionan una información rica e interesante sobre cómo se construye el conocimiento matemático. Este análisis nos permitirá encontrar los patrones comunes a que obedecen los errores y, así, poder hacer inferencias sobre los procesos mentales y sobre las estructuras en las que se van organizando los conocimientos.

Es precisamente la regularidad con que aparecen ciertos errores lo que nos permite elaborar clasificaciones de los mismos, teniendo en cuenta que las categorías no son compartimentos estancos y se suelen solapar unas con las otras, ya que rara vez un error obedece a una única causa. Por este motivo, para intentar interpretar mejor sus causas, se categorizarán los errores a partir de diferentes criterios.

Palabras clave: Errores conceptuales, matemáticas, grado en educación primaria

ABSTRACT

Difficulties in basic mathematical concepts in teachers to be

Mathematics is important for the formation of a citizen because it constitutes a powerful instrument of analysis of the reality, of understanding of the world and of development of the critical capacity to intervene.

We believe that this is the most important purpose of people's mathematical activity, but to reach it, future teachers must have confidence in the basic mathematical knowledge on which to build further knowledge.

However, in the field of mathematics education, errors constantly appear in student productions.

This article discusses the errors committed by students because they provide rich and interesting information about how the mathematical knowledge is constructed. This analysis will allow us to find the common patterns that errors follow, and thus we'll be able to make inferences about the mental processes and the structures that help to organize knowledge.

It is precisely the regularity in which certain errors appear that allows us to develop classifications of these errors. Also, we must take into consideration that the categories are not hermetic compartments and often overlap with each other, as errors rarely occur due to a single cause. For this reason, to try to better understand the causes, errors are categorized according to different criteria.

Keywords: Misconceptions, mathematics, teacher training degree

ANTECEDENTES

La adquisición de ciertas habilidades matemáticas básicas y la comprensión de determinados conceptos son imprescindibles para un funcionamiento efectivo en la sociedad actual y, por tanto, los futuros maestros deben estar preparados para afrontar con seguridad su tarea profesional como docentes de matemáticas para que, de este modo, los niños aborden el aprendizaje de esta materia desde el conocimiento lógico y reflexivo.

El modelo de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas al que están acostumbrados la mayoría de los estudiantes del grado en educación primaria a lo largo de su escolarización, comporta una concepción de las matemáticas que no ayuda a que, desde la universidad, se les plantee otro modelo que implique que experimenten, se formulen preguntas, apliquen estrategias diversas o generalicen resultados, por la falta de competencias con que acceden a los estudios universitarios e, incluso, por sus creencias sobre las propias aptitudes.

Este cambio en la manera de enseñar, supone apoyar el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de educación a la vez que aprenden a ser maestros.

Pero, para poder encarar esta tarea transformadora, los estudiantes deben superar los déficits de aprendizaje de conocimientos matemáticos básicos. Es por ello que nos planteamos detectar, diagnosticar y estudiar los errores que los futuros maestros cometen tanto a nivel conceptual como procedimental. Los resultados de la investigación pueden contribuir a ayudar a los estudiantes a solventar sus carencias y a los profesores de las facultades de educación a enfocar, con mayor bagaje de conocimiento, los cursos de formación. Se trata de prever el grado de dificultad potencial del contenido matemático, identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza y organizar estrategias para un mejor aprendizaje insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades.

Todas las teorías sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas coinciden en la necesidad de identificar los errores de los alumnos en el proceso de aprendizaje, determinar las causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esta información.

A menudo el origen de los errores no es sencillo de encontrar, porque son muy diversos y las causas pueden ser variadas, aunque a veces se encuentran ciertos errores recurrentes, para los que la investigación didáctica aporta explicaciones y posibles maneras de afrontarlos.

Parece razonable pensar que si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen hay que buscarlo en los conocimientos requeridos para la tarea, y no tanto en los propios alumnos.

Mucha es la literatura sobre clasificación y categorización de errores y la forma de estudiarlos. Indicamos algunos autores que han trabajado en esta línea.

Rico (1995), por ejemplo, propone estudios atendiendo a cuatro líneas de investigación: estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores; trabajos sobre el tratamiento curricular de los errores; estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de los alumnos.

Por citar algunas clasificaciones de errores en matemáticas, empezamos con la dada por Davis (1984) quien elaboró una teoría de esquemas o constructos personales. Los errores clásicos explicados son: reversiones binarias, errores inducidos por el lenguaje o la notación, errores por recuperación de un esquema previo, errores producidos por una representación inadecuada y reglas que producen reglas.

Radatz (1979), citado por Rico (1995), ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis. Booth (1984), a su vez, describe errores comunes cometidos por los alumnos atribuidos a: la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras; el objetivo de la actividad; la comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes y el uso inadecuado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”.

Mosckovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) hacen una clasificación empírica de los errores, que se basa en datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje, falta de verificación de la solución, etc. Astolfi (1999) describe una tipología de errores relacionada con distintas causas, entre otras, los hábitos escolares, las concepciones alternativas de los alumnos, los procesos efectuados, la sobrecarga cognitiva en la actividad o la complejidad propia del contenido.

Si diferenciamos entre errores conceptuales y procedimentales, podemos referenciar diversos autores. Entendemos por conceptos, siguiendo a Segovia y Rico (2011), las ideas con las que pensamos, y por procedimientos los modos y técnicas con las que se utilizan estas ideas.

En cuanto a los errores conceptuales o originados en los procesos de adquisición del conocimiento, Mosvshovitz et al. (1987), Esteley y Villarreal (1990) y Astolfi (1999) hablan de errores ocasionados por inferencias erróneas. Mientras que Davis, (1984), Caputo y Macías, (2006) se refieren a errores ocasionados por la interferencia de los conocimientos previos y Davis (1984), Radatz (1980), Mosvshovitz et al. (1987) y Esteley y Villarreal (1990) consideran los errores originados por la estructura semántica del lenguaje matemático. Astolfi (1999), Ruano, Socas y Palarea (2003) estudian los errores que tienen su origen en las propiedades y reglas aritméticas. Por su parte, Zigmond et al. (1981), Mosvshovitz et al. (1987), Esteley y Villarreal (1990), Astolfi, (1999) y Caputo y Macias (2006) se centran en los fallos engendrados por conceptos estructurales mal comprendidos, y Davis (1984) en los provocados por las representaciones inadecuadas de la información.

Entre los estudios sobre errores de tipo procedimental, que se producen durante el proceso de resolución de una tarea matemática, destacamos: Ruano, Socas y Palarea (2003), que hablan de errores de manipulación de diferentes expresiones matemáticas; Esteley y Villarreal (1996) y Astolfi (1999), que consideran los errores ocasionados en la transcripción de la información; Caputo y Macías (2006), que encuentran secuencias incoherentes en los procedimientos de los alumnos; Roberts (1968), que analiza la aplicación de algoritmos defectuosos; Engelhart (1977) y Caputo y Macías (2006), que se fijan en errores en algunas operaciones; y Cox (1975) y Zigmond et al. (1981) que incluyen los errores fortuitos.

Los futuros maestros tienen dificultades para argumentar las decisiones que toman cuando resuelven los problemas. Esta dificultad puede ser considerada una evidencia de la escasa conciencia de las relaciones conceptuales que dan soporte a los procedimientos, posiblemente debido a la manera en que estos futuros maestros han estado aprendiendo las matemáticas. Esto justifica la necesidad de un reaprendizaje de las matemáticas que son el foco de la enseñanza en la educación primaria (Zazkis, 2011).

Este autor también indica que hay que "aprender de nuevo lo que ya fue aprendido" lo cual, en ocasiones, puede requerir metodologías diferentes que cuando se intenta construir un nuevo conocimiento. En este sentido, las investigaciones de Muñoz-Catalán y Carrillo (2007), Saenz (2007) y Valdemoros (2010) explican que hay que potenciar el reaprendizaje matemático en determinados ámbitos y que este reaprendizaje debe implicar familiarizar a los futuros maestros con los contenidos matemáticos elementales de la educación primaria. De este modo los estudiantes para maestro han de construir un conocimiento suficiente de matemáticas para la enseñanza que fundamente la competencia docente del maestro. Así, podrá gestionar con garantías nuevos desarrollos curriculares dirigidos a fomentar las capacidades de razonamiento en los alumnos de educación primaria.

Lo que hemos llamado reaprendizaje, además de la comprensión matemática, es necesario que tenga en cuenta las concepciones que los maestros tienen sobre su papel como maestros y lo que significa aprender matemáticas (Lebrija, Flores y Trejos, 2010; Prieto y Valls, 2010; Sanhueza, Penalva y Friz, 2013).

OBJETIVOS

Una vez definida la problemática de la necesidad de revisar los errores que los estudiantes del grado en Educación Primaria muestran en los conocimientos matemáticos básicos, para poder enfrentarlos con estos errores y superarlos, nos preguntamos por la tipología de dichos errores y las posibles dificultades implícitas que se perciben detrás de los errores que los alumnos presentan.

Finalmente, nos preguntamos: ¿Qué se debería tener en cuenta en la universidad para dar una mejor solución a las necesidades de aprendizaje en matemáticas básicas de los estudiantes?

Para responder a estas cuestiones nos formulamos los siguientes objetivos:

- Describir los errores en los contenidos básicos de matemáticas que los estudiantes del grado en Educación Primaria han mostrado en los últimos cursos, desde que se implementaron los grados.

- Categorizar dichos errores atendiendo a diferentes variables: bloque de matemáticas (numeración y cálculo, relaciones y cambio, medida, espacio y forma, y análisis de datos y probabilidad), conceptos erróneos subyacentes a los errores detectados y carencias que evidencian.

PARTICIPANTES

Los participantes en el estudio son estudiantes de tercer y cuarto cursos del grado en Educación Primaria de la Facultad de Psicología, Ciencias de la Educación y del Deporte Blanquerna, de la Universidad Ramon Llull. El trabajo de campo, se efectúa a lo largo de los cursos, 2012-13, 2013-14, 2014-15 y 2015-16.

Los instrumentos son dos pruebas de conocimientos básicos en matemáticas para determinar las concepciones correctas y erróneas de los estudiantes. En tercer curso, se estudian los bloques de numeración y cálculo y relaciones y cambio y, en cuarto, los de medida, espacio y forma y análisis de datos y probabilidad.

En conjunto, se han evaluado 226 estudiantes.

MÉTODO

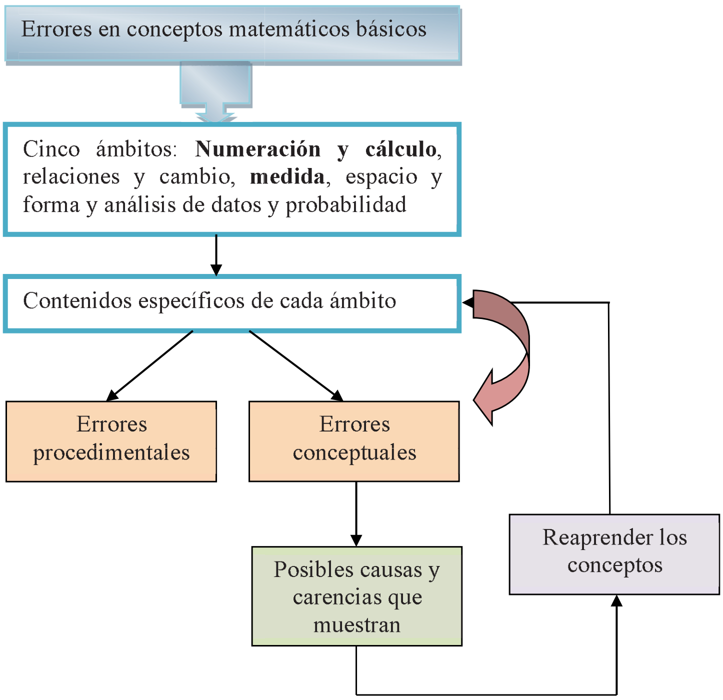
Metodológicamente, se parte de un diseño de investigación cualitativo, de tipo descriptivo y humanístico–interpretativo según el paradigma de Kuhn (1971), teniendo en cuenta las tres dimensiones que definen Lincoln y Guba (1985): dimensión ontológica, dimensión epistemológica y dimensión metodológica.

En relación a la dimensión ontológica, es decir, la manera de ver y entender la realidad educativa, consideramos que la naturaleza de lo que pretendemos investigar –las carencias en los conceptos básicos de matemáticas de los estudiantes del grado en Educación Primaria– es una realidad objetiva, observable y medible. En cuanto a la dimensión propiamente epistemológica, –la relación del investigador con esta realidad– estará orientada a la comprensión de las causas soterradas en las concepciones erróneas y en cuanto a la dimensión metodológica, nos posicionamos en un enfoque cualitativo de la investigación en el sentido que apunta Martínez Miguélez (2011) cuando lo describe como aquel que trata de identificar la naturaleza profunda de las realidades.

Este proceso se efectúa en cuatro etapas: detección de los errores, elaboración de las categorías de análisis, agrupación de las respuestas erróneas en estas categorías e interpretación de los datos obtenidos.

En la figura 1, apreciamos el proceso que se debería seguir para detectar los errores de los estudiantes en los distintos ámbitos de matemáticas, estudiar las causas que los producen, y así, reaprender los conceptos de manera comprensiva y poder erradicar dichos errores.

Figura 1. Proceso de detección y corrección de los errores



RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Empezamos la discusión de los resultados, eligiendo los errores que se producen más comúnmente y clasificándolos según los bloques de matemáticas.

De cada bloque, indicamos conceptos equivocados subyacentes a los errores detectados y carencias que evidencian.

En la tabla 1, los principales errores conceptuales que se han detectado en el bloque de numeración y cálculo y en la 2, los de medida. No exponemos los de los tres ámbitos restantes ni los procedimentales, por limitación de espacio, pero cabe decir que muchos de estos errores implican conceptos mal adquiridos como, por ejemplo, 2/5 + 3/7 = 5/12, donde el procedimiento incorrecto (sumar numeradores y denominadores) supone incomprensión del concepto de fracciones equivalentes.

Tabla 1. Errores básicos más frecuentes en numeración y cálculo

Contenido	Concepto en el que se muestra la dificultad	Ejemplos del error	Carencias que evidencian
Escritura de números, fundamentalmente números grandes y con ceros en los dígitos centrales		Cuarenta y dos mil millones, veintitrés tres mil seis 42.023.006	Desconocimiento del sistema de numeración decimal.
Comprensión del valor de posición	En la ordenación numérica	3,42 < 3,420 porqué 42 < 420	Entender los números decimales como dos enteros.
	En la colocación de los dígitos (órdenes de unidad) en las operaciones, fundamentalmente, con números decimales.	3,54 + 4 = 3,58	Aplicación de reglas aplicables a los números naturales pero no a los decimales.
	En la interpretación de los diferentes órdenes de unidad.	Qué número expresado en unidades representa la cantidad 38 centésimas y 42 décimas? (4,58) y dar diferentes números como: 8 (suma de 3,8 y 4,2); 458 suma de 420 y 38, etc.	Desconocimiento del sistema de numeración decimal.
	En la identificación de los órdenes de unidad en los números y en el redondeo de números	Redondea 3.425,28 a las décimas. 343 (Confusión entre decenas y décimas. También puede ser centenas y centésimas) El orden de unidades superior del número 349 852 321 000 es ..... Decir un valor que no sea centena de millar de millón	Desconocimiento del sistema de numeración decimal.
Atención a la razonabilidad de resultados en el cálculo y en la solución de un problema	En multiplicaciones y divisiones cuando el multiplicador o el divisor son inferiores a la unidad.	24 x 0,6 o 24: 0,6. Dar resultados superiores a 24 en la multiplicación o inferiores a 24 en la división.	Entender que el producto siempre es superior a los factores o el cociente siempre es inferior al dividendo.
	En el cambio de unidades.	Pasar 2,3 h a minutos y dar resultados superiores a 180	No analizar el resultado y error de

Contenido	Concepto en el que se muestra la dificultad	Ejemplos del error	Carencias que evidencian
		minutos.	cálculo.
	En la estimación de la "medida" del resultado de una operación sin efectuarla.	¿Cuántas cifras tiene el resultado de la multiplicación 346 x 2430? Decir 7 cifras en vez de seis.	Entender que la magnitud del resultado de una multiplicación corresponde a la suma de las magnitudes de los factores.
	En los problemas	En un autobús caben 60 personas. Si tenemos que ir de excursión y somos 142, cuántos autobuses necesitamos? Y se da como resultado 2,3 autobuses.	No valorar un resultado real y dar como respuesta el cociente de la división sin interpretarlo.
Prioridad de las operaciones		10-4 x 20 + 70 y dar como resultado 190 en lugar de 0. 6 + 30: 6-3 + 24 y dio como resultado 27 en lugar de 32	No conocer la prioridad de las operaciones y efectuarlas de izquierda a derecha tal como se presentan.
Propiedades de las operaciones		3 x (5 x 4) = (3 x 5) x (3 x 4) En este caso, hay confusión con la propiedad distributiva de la multiplicación respecto la suma.	No entender el significado de las propiedades de las operaciones, normalmente, por aplicarlas sin sentido.
Ordenar, comparar y operar números decimales	En las operaciones básicas.	34,72 + 58,64 = 92,136 en lugar de 93,36	Considerar la parte entera y la parte decimal como dos partes enteras que no están relacionadas.
	En las multiplicaciones y divisiones por la unidad seguida de ceros.	Para multiplicar por 10 añade un cero al final del número 4,82 x 10 = 4.820	Aplicar a los números decimales "reglas mecánicas" que sólo son aplicables a los números naturales.
	En la ordenación y comparación de números decimales.	Entre 12,45 y 12,46 no hay ningún número	No entender la densidad de los números decimales
Ordenar, comparar y operar fracciones	En la ordenación de fracciones.	Ordenar 2/3 y 5/8 y decir 2/3 < 5/8 porqué 2 < 5 y 3 < 8	No comprender el concepto de fracción.
	En las operaciones con fracciones.	Sumar 3/8 + 6/16 + 9/3 y sumar los numeradores y los denominadores 18/27 Sumar fracción y entero 3 + 3/4 y escribir 6/4 sumando el entero con el numerador de la fracción	No comprender el concepto de fracción ni de fracciones equivalentes.

Relación entre fracciones, decimales y porcentajes	Pasar de porcentaje a fracción.	¿Qué fracción representa aproximadamente un 21%? Y no responder 1/5	No comprender el concepto de porcentaje.
	Expresar un número decimal como fracción irreducible y como porcentaje.	Expresa 0,42 como fracción irreducible y como porcentaje. Y escribir 42/100 o 42/99.	No comprender los conceptos de fracción irreductible y de porcentaje.
	Ordenar números fraccionarios y decimales mezclados.	Ordena los siguientes números de mayor a menor 0,99; 9/10; 999/1000; 0,099	Pasar incorrectamente de fracción a decimal.
	Expresar en forma de fracción números decimales periódicos.	Expresa en forma de fracción $3,\overset{\frown}{27}$ y escribir, por ejemplo, 327/100	No comprender la noción de decimal periódico y confundirlo con fracción decimal.
Divisibilidad	No entender la descomposición factorial de un número y no saber encontrar los divisores.	Encontrar los divisores de 2^3 x 11 y poner solo 2 y 11	No entender que hay más factores que las bases de las potencias.
	Confundir el m.c.m. y el m.c.d. de dos números.	Calcular el m.c.m. de 312 y 124, y responder, por ejemplo, 8.	No saber el significado de m.c.m. y m.c.d.

Tabla 2. Errores básicos más frecuentes en medida

Contenido	Concepto en el que se muestra la dificultad	Ejemplos del error	Carencias que evidencian
Unidades de medida	Cambio de unidades.	Un depósito contiene 8 hl de agua. Se han sacado 58 litros. Cuántos decilitros de agua quedan en el depósito? Y responder, por ejemplo, 85,8 dl por confundir decilitros y decalitros.	Desconocimiento del significado de las distintas unidades del SMD, probablemente por no visualizar realmente las medidas sino efectuar solo conversiones en el papel.
	Pasar de forma compleja a incompleja o al revés.	Expresar la medida 2 kg 30 g en hectogramos, y responder, por ejemplo, 2030 hectogramos.	
	Relación entre unidades de diferentes magnitudes.	¿Cuántos metros cúbicos de agua equivalen a 15 kl? Y responder, por ejemplo, 15.000 m^3 por suponer que 1 m^3 equivale a 1 l.	Falta de razonabilidad del resultado por no entender el significado de 1 m^3 puesto que en este volumen caben muchos litros.
	Unidades en el sistema sexagesimal.	Calcular la sexta parte de 63 h 12 min, y responder, por ejemplo, 10 h 2 min.	No entender el sistema sexagesimal y operar como si fuera base 10.
	Escritura de las unidades de medida.	Preguntar “En una prueba escrita un alumno escribe 625/5 = 125 = 125 cm. Hay algún error en estas igualdades?” Y decir que no.	No comprender el concepto de igualdad.

Relación entre magnitudes lineales y cuadráticas	Escala.	En un plano hecho a escala 1: 100, el área de una superficie cuadrada es de 25 cm^2 en el plano. ¿A qué área real corresponde? Y responder, 2.500 cm^2.	Aplicar linealmente la escala.
	Relación área – perímetro.	Calcula el área y el perímetro de un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm. Si el cateto mayor aumenta 2 cm, ¿Cuánto aumentará el área? Y decir, por ejemplo, el doble.	Aplicar la proporcionalidad lineal.
	Relación entre áreas y longitudes.	Si la relación entre las superficies de dos cuadrados es 16, ¿Cuál es la relación entre los lados de ambos? Y responder, 8.	
Áreas de figuras planas	Cálculo de áreas.	Calcula el área de un círculo de radio 5 cm.	Múltiples errores derivados de no conocer la fórmula o de utilizar incorrectamente el número π.

CONCLUSIONES

El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee una rica información sobre cómo se construye el conocimiento matemático. La identificación de estos obstáculos nos revela la dificultad que el conocimiento matemático complejo tiene para los estudiantes y puede, incluso, pasar inadvertida por los profesores si no se indaga suficientemente en el significado personal que un contenido matemático determinado tiene para el alumno. Nos permite una evaluación y un diagnóstico más efectivo para poder apoyar a los estudiantes en sus dificultades.

Es necesario, pues, diseñar procesos de enseñanza-aprendizaje y de evaluación que pongan el énfasis en la adquisición de destrezas y conocimientos y tratar de mejorar los factores afectivos y actitudinales, teniendo en cuenta que la finalidad primordial del profesor en el aula es ayudar a sus alumnos a desarrollar el razonamiento matemático, su capacidad de formular y resolver problemas, comunicar sus ideas matemáticas y relacionar las diferentes partes de las matemáticas entre sí y con las restantes disciplinas.

Rectificar los errores no significa penalizarlos. Entendemos que descubrir las carencias en conceptos matemáticos ayuda al estudiante a construir conocimiento, porque si el conocimiento matemático se edifica a través de un proceso de abstracción reflexiva, aparecen sistemáticamente errores y, entonces, resulta necesaria la inclusión de un diagnóstico, detección, corrección y superación de los mismos. Además, la consideración del error como parte coherente de un proceso ayuda al alumno a tomar conciencia de que puede aprender de sus errores y, a los docentes, a aprender de los errores de los estudiantes.

Para lograr esto el profesor tiene que intentar que la superación de los errores constituya un elemento motivador, consiguiendo que el alumno se enfrente a la contradicción proveniente del error y consiga eliminar sus falsos conceptos para que estos no vuelvan a aparecer. Esto generará en la clase debates que son de gran valor.

REFERENCIAS

Astolfi, J. P. (1999). *El error, un medio para enseñar*. Sevilla: Diada.

Booth Lesley, R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windson, England: NFER-Nelson.

Caputo, S. y Macías, D. (2006). Análisis de los errores de los alumnos de la asignatura "Algebra I" al elaborar demostraciones. Disponible en: http:// www.unne.edu.ar/ Web / cyt/ cyt2006/ 09-Educacion/ 2006-D-012.pdf.

Cox, L. (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education, 6(4),* 202-220.

Davis, R. (1984). *Learning Mathematics. The cognitive Science Approach to Mathematics Education*. Croom Helm: Australia.

Engelhardt, J. M. (1977). Analysis of children's computational errors: a qualitative approach. *British Journal of Educational Psychology, 47,* 149–154.

Esteley, C. y Villarreal, M. (1990). *Categorización de errores en Matemática*. XIII REM. San Luis.

Esteley, C. y Villarreal, M. (1996). Análisis y Categorización de errores en Matemática. *Revista de Educación Matemática. 11(1)*. Universidad Nacional de Córdoba.

Kuhn, T. (1971). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Lebrija, A., Flores, R.C. y Trejos, M. (2010). El papel del maestro, el papel del alumno: un estudio sobre las creencias e implicaciones en la docencia de los profesores de matemáticas en Panamá. *Educación Matemática, 22 (1),* 31-55.

Lincoln, Y.S. y Guba, E.G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park, CA: Sage Publications.

Martínez Miguélez, M. (2006). La Investigación Cualitativa (Síntesis Conceptual). *Revista de Investigación en Psicología [en línia], Vol. 9*, 123–146. Disponible en:
http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1609-74752006000100009

Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O. e Inbar, S., (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18(1),* 3-14.

Muñoz-Catalán, M.C. y Carrillo, J. (2007). Conocimiento numérico de futuros maestros. *Educación matemática, 19 (1),* 5-25.

Prieto, J. L. y Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática, 22 (1),* 57-85.

Radatz, H. (1980). *Student's Errors in the Mathemat is Learning Process: A Survey. For the Learning of Mathematics*. *Vol 1 (1),*16-20.

Disponible en: http://www.jstore.org/stable/40247696

Roberts, G. H. (1968). The failure strategies of third grade arithmetic pupils, *Arithmetic. Teacher, 15*, 442-446.

Ruano, R.; Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática*. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), 311-322.

Saenz, C. (2007). La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 25 (3)*, 355-366.

Sanhueza, S., Penalva, M.C. y Friz, M. (2013). Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 16 (1),* 99-125.

Segovia, I. y Rico, L. (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Thomas, J.W. (2000). *A review of research on project-based learning*. California: Autodesk Foundation.

Valdemoros, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. RELIME. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13 (4, 2)*, 423-440.

Zazkis, R. (2011). Relearning Mathematics. A Challenge for Prospective *Elementary School Teachers.* Charlotte, NC: Information Age Publishing, Inc.

Zigmond, N., Vallecorsa, A., y Silverman, R. (1981). *Assessment for instructional planning in special education.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.